8 Si mostri, senza usare il teorema di L'Hôpital, che:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{x - \pi} = -1.$$

8 Il limite

$$\lim_{x \to \pi} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{x - \pi}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Poniamo $h = x - \pi$ e sostituiamo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(\pi + h)} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{h}.$$

Esso rappresenta il limite del rapporto incrementale della funzione $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ calcolato nel punto $x = \pi$. Per definizione è la derivata calcolata in tale punto ovvero

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(\pi + h)} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{h} = f'(\pi).$$

Per i teoremi di derivazione risulta

$$f'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \quad \rightarrow \quad f'(\pi) = e^{\operatorname{sen} \pi} \cdot \cos \pi = -1,$$

pertanto il limite di partenza è uguale a -1.

Tuttavia, dopo avere eseguito la sostituzione, si può procedere nel seguente modo alternativo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(\pi + h)} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} h} - 1}{h}$$

moltiplichiamo numeratore e denominatore per $-\operatorname{sen} h$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} h} - 1}{-\operatorname{sen} h} \cdot \left(-\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) =$$

per i limiti notevoli $\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$ e $\lim_{h \to 0} \frac{e^{g(h)} - 1}{h} = 1$, risulta allora:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} h} - 1}{-\operatorname{sen} h} \cdot \left(-\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) = 1 \cdot (-1) = -1.$$