

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**  
**CORSO DI ORDINAMENTO • 2001**  
**Sessione ordinaria**

- 10** Si consideri la funzione  $\frac{x + \sin x}{x - \cos x}$ . Stabilire se si può calcolarne il limite per  $x \rightarrow +\infty$  e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hospital.

**SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME**  
**CORSO DI ORDINAMENTO • 2001**  
**Sessione ordinaria**

**10** Dato il limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$ , si raccoglie  $x$  al numeratore e al denominatore della frazione:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right)}{x \left( 1 - \frac{\cos x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right)}{\left( 1 - \frac{\cos x}{x} \right)}.$$

Poiché  $-1 \leq \sin x \leq 1$  e quindi  $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ , per il teorema del confronto vale  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ .

Allo stesso modo si dimostra che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ . Pertanto esiste il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right)}{\left( 1 - \frac{\cos x}{x} \right)} = 1.$$

Alla luce del teorema di De L'Hospital, volendo trattare il limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ , una delle condizioni dell'ipotesi è che deve esistere un valore  $M$  tale che,  $\forall x > M$ , le funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  siano derivabili e  $g'(x) \neq 0$ . Nel caso in questione  $g(x) = x - \cos x$  e  $g'(x) = 1 + \sin x$ . Si osserva che la derivata prima si annulla per  $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  con  $k$  intero e quindi non esiste un intorno di  $+\infty$  in cui valga sempre  $g'(x) \neq 0$ . Pertanto il teorema non può essere applicato.