10 Si stabilisca per quali valori reali di a e b, si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{a+bx}-2}{x} = 1.$$

10 Consideriamo il limite finito:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{a+bx}-2}{x} = 1, \text{ con } a,\ b \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che per $x \to 0$ la funzione tende alla forma $\frac{\sqrt{a}-2}{0}$. Pertanto se $\sqrt{a}-2 \neq 0$ il limite è infinito. Ne segue che:

$$\sqrt{a}-2=0 \ \to \ \sqrt{a}=2 \ \to \ a=4.$$

Il limite diventa:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+bx}-2}{x}$$

e ha forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Razionalizziamo il numeratore della funzione:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{4+bx}-2)(\sqrt{4+bx}+2)}{x(\sqrt{4+bx}+2)} = \lim_{x \to 0} \frac{4+bx-4}{x(\sqrt{4+bx}+2)} = \lim_{x \to 0} \frac{b}{(\sqrt{4+bx}+2)} = \frac{b}{4}.$$

Poniamo il limite uguale a 1:

$$\frac{b}{4}=1 \ \to \ b=4.$$

Concludendo, il limite vale 1 se $a=4$ e $b=4$.