1 Si calcoli

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2}.$$

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2012

1 Il limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2}$ porta alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamolo nel seguente modo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{2^{3x}-3^{4x}}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{8^x-81^x}{x}\right) =$$

sommiamo e sottraiamo 1 al numeratore:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{8^x-1+1-81^x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left[\frac{8^x-1}{x} - \frac{81^x-1}{x}\right] =$$

applichiamo il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$, con $a > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}[\ln 8 - \ln 81] = -\infty.$$

In alternativa si può risolvere il limite di partenza applicando il teorema di De L'Hospital, essendo soddisfatte le relative ipotesi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{D(2^{3x}-3^{4x})}{D(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}\ln 8 - 3^{4x}\ln 81}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln 8 - \ln 81}{2x} = -\infty.$$